Title	非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の適切な高次精度差分(計算流体力学に関わる数理的諸問題)
Author(s)	森西, 洋平
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 974: 84-94
Issue Date	1996-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/60767
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
974巻 1996年 84-94

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の適切な高次精度差分

名古屋工業大学　森西洋平 (Youhei Morinishi)

1　はじめに

乱流場の非定常解析手法として、ナビエ・ストークス (NS, Navier-Stokes) 方程式の直接数値計算 (DNS, direct numerical simulation) やフィルタ化NS方程式を解くラージ・エディ・シミュレーション (LES, large eddy simulation) が用いられるようになってきた。DNSやLESではNS方程式の離散化に際して人工的な付加項はできるだけ排除したい。また、できるならばNS方程式の解析的な性質を離散的に模擬する空間離散化手法の使用が望ましい。与えられた格子点数ではスペクトル法が最高の離散化精度を提供するが、その適用は単純な形状の流れ場に限られる。よって、より汎用性の高い離散化手法として差分法に期待が寄せられる。しかし、差分法を単純に適用したのではNS方程式が本来持つ解析的な性質を再現することはできない。そこで著者は、非圧縮性流体のNS方程式と連続の式とが持つ解析的な保存特性を基に、いくつかの差分格子系での差分スキームの保存特性を検討し，さらに，高次精度の適切な対流項差分スキームも提案した[1, 2, 3, 4]。NS方程式と連続の式とを速度と圧力とを変数として解く非圧縮性流体の数値解析ではスタガード格子系が多用されるので、本報ではスタガード格子系の差分スキームの検討結果を示す。

2　非圧縮性流体の基礎方程式からの解析的要求事項

まず一般的に次の時間発展方程式を考える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + {}^1Q(\phi) + {}^2Q(\phi) + {}^3Q(\phi) + \cdots = 0 \tag{1}$$

上式中のソース項 ${}^kQ(\phi)$ は次式が満足される場合に保存形であるとする。

$${}^kQ(\phi) = \nabla \cdot ({}^kF(\phi)) = \frac{\partial({}^kF_j(\phi))}{\partial x_j}. \tag{2}$$

全てのソース項が保存形である場合、注目する検査体積 V で式(1)を積分した後に発散定理を用いて式変形を行えば次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \phi\, dV = -\iint_S ({}^1F(\phi) + {}^2F(\phi) + {}^3F(\phi) + \cdots)\cdot dS \tag{3}$$

上式は、検査体積 V を囲む界面 S を通過する流束 ${}^kF^\phi$ の総和と、検査体積 V 内の ϕ の総和の時間変化とが釣り合うことを示している。特に空間的に周期的な場では、${}^kQ^\phi$ が保存的であると ϕ の総和は時間的に変化しない。

非圧縮性流体の運動を記述する基礎方程式、つまり質量と運動量の保存則は連続の式とNS方程式として知られている。

$$(Cont.) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (Conv.)_i + (Pres.)_i + (Visc.)_i = 0, \tag{5}$$

ここで、$(Cont.)$、$(Pres.)_i$、$(Visc)_i$ はそれぞれ速度の発散、圧力項および粘性応力項であり、次式で定義される。

$$(Cont.) \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \ \ (Pres.)_i \equiv \frac{\partial p}{\partial x_i}, \ \ (Visc.)_i \equiv \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

v_i $(i = 1, 2, 3)$ は速度ベクトル、p は圧力を密度で割った値、τ_{ij}は粘性応力である。$(Cont.) = 0$ では質量が保存される。圧力項 $(Pres.)_i$ および粘性応力項 $(Visc.)_i$ は先天的に保存形である。また、$(Conv.)_i$ はNS方程式の対流項の総称であり、発散型 $(Div.)_i$ 以外にも勾配形 $(Adv.)_i$、混合型 $(Skew.)_i$ および回転形 $(Rot.)_i$ が理論および数値解析でしばしば用いられ、これらの選択が数値安定性に関する議論の的ともなっている。

$$(Div.)_i \equiv \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} \tag{6}$$

$$(Adv.)_i \equiv v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{7}$$

$$(Skew.)_i \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{8}$$

$$(Rot.)_i \equiv v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial v_j v_j}{\partial x_i} \tag{9}$$

これらの型は解析的に次式で関係づけられている。

$$(Adv.)_i = (Div.)_i - v_i \cdot (Cont.) \tag{10}$$

$$(Skew.)_i = \frac{1}{2}(Div.)_i + \frac{1}{2}(Adv.)_i \tag{11}$$

$$(Rot.)_i = (Adv.)_i \tag{12}$$

よって、4つの対流項の型は連続の式 $(Cont.) = 0$ が満足される場合に互換となる。また、次の関係も得られる。

$$\begin{aligned} (Skew.)_i &= (Div.)_i - \frac{1}{2} v_i \cdot (Cont.) \\ &= (Adv.)_i + \frac{1}{2} v_i \cdot (Cont.) \end{aligned} \tag{13}$$

以上より、4つの対流項の型のうち発散型 $(Div.)_i$ のみが先天的に保存形、他の型は連続の式 $(Cont.) = 0$ が満足される場合に保存形となることがわかる。

速度二乗量 ${v_1}^2/2$ の輸送方程式はNS方程式(5)の $i = 1$ 成分に v_1 を乗じて構成される。

$$\frac{\partial {v_1}^2/2}{\partial t} + v_1 \cdot (Conv.)_1 + v_1 \cdot (Pres.)_1 + v_1 \cdot (Visc.)_1 = 0 \tag{14}$$

対流項に起因する項 $v_1 \cdot (Conv.)_1$ は、対流項の型に応じて次のように変形されうる。

$$v_1 \cdot (Div.)_1 = \frac{\partial v_j {v_1}^2/2}{\partial x_j} + \frac{1}{2}{v_1}^2 \cdot (Cont.) \tag{15}$$

$$v_1 \cdot (Adv.)_1 = \frac{\partial v_j {v_1}^2/2}{\partial x_j} - \frac{1}{2}{v_1}^2 \cdot (Cont.) \tag{16}$$

$$v_1 \cdot (Skew.)_1 = \frac{\partial v_j {v_1}^2/2}{\partial x_j} \tag{17}$$

よって、速度二乗量の輸送方程式中では、4つの対流項の型のうち混合型 $(Skew.)_i$ のみが速度二乗量の輸送方程式中で先天的に保存形、他の型は 連続の式 $(Cont.) = 0$ が満足される場合に保存形となることがわかる。速度二乗量の輸送方程式中での圧力項と粘性項は次式のように変形できる。

$$v_1 \cdot (Pres.)_1 = \frac{\partial p v_1}{\partial x_1} - p\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{18}$$

$$v_1 \cdot (Visc.)_1 = \frac{\partial \tau_{1j} v_1}{\partial x_j} - \tau_{1j}\frac{\partial v_1}{\partial x_j} \tag{19}$$

右辺第2項の存在によりこれらの項は保存形とはならない。速度二乗量 ${v_2}^2/2$ と ${v_3}^2/2$ の輸送方程式中の各項の保存特性も ${v_1}^2/2$ の輸送方程式中のそれと同様に評価できる。

NS方程式(5)の i 成分に v_i を乗じて縮約をとると運動エネルギ K $(\equiv v_i v_i/2)$ の輸送方程式が得られる。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + v_i \cdot (Conv.)_i + v_i \cdot (Pres.)_i + v_i \cdot (Visc.)_i = 0 \tag{20}$$

運動エネルギの輸送方程式中における対流項の各型の保存特性は速度二乗量の輸送方程式中でのそれと同様である。運動エネルギの輸送方程式中での圧力項と粘性項は次式のように変形できる。

$$v_i \cdot (Pres.)_i = \frac{\partial p v_i}{\partial x_i} - p \cdot (Cont.) \tag{21}$$

$$v_i \cdot (Visc.)_i = \frac{\partial \tau_{ij} v_i}{\partial x_j} - \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{22}$$

これらより、運動エネルギの輸送方程式中では、圧力項は連続の式 $(Cont.) = 0$ が満足されると保存形になるが、粘性項は式(22)右辺第2項の粘性散逸項の存在により保存形とはならない。

NS方程式の各項	輸送方程式		
	v_i	${v_1}^2/2$	K
$(Div.)$	⊙	○	○
$(Adv.) = (Rot.)$	○	○	○
$(Skew.)$	○	⊙	⊙
$(Pres.)$	⊙	×	○
$(Visc.)$	⊙	×	×

表1. v_i, $v_1^2/2$ および K の輸送方程式中での対流項の各型、圧力項および粘性項の保存特性。⊙ は先天的に保存形、○ は $(Cont.) = 0$ ならば保存形、× は非保存形を示す。

以上の解析的結果をまとめると表1が得られる。表1は、NS方程式中の対流項の各型、圧力項および粘性項の、v_i 、${v_1}^2/2$ および K の輸送方程式中での保存特性を示している。これより、非粘性で連続の式が満足される場合に、非圧縮性流体のNS方程式は運動量に加えて運動

エネルギの保存則も兼ねることがわかる。よって、対流項の型の互換性、対流項の運動量、速度二乗量、運動エネルギの保存特性に加え、圧力項の運動量と運動エネルギの保存特性にも注目すべきである。粘性項に対する解析的要求は運動方程式中で保存形となることのみである。本研究では、表1の保存特性を離散的に満足する差分スキームを適切な差分スキームとする。

ところで、これまでの解析的な議論は2つの変数の積の微分に関する次の恒等式の成立を前提に行ってきた。

$$\frac{\partial(ab)}{\partial x}=a\frac{\partial b}{\partial x}+b\frac{\partial a}{\partial x} \tag{23}$$

しかし、微分オペレータを差分オペレータに置き換えた場合、上式は一般的には成立しない。これは、連続の式とNS方程式を差分により離散化して解く場合、質量と運動量の保存は確保できるものの、対流項の型の互換性や速度二乗量と運動エネルギの保存特性は一般的には満足されないことを意味する。しかし、連続の式とNS方程式の離散式を注意深く検討した結果、それらを離散的に満足する差分スキームもいくつか存在することがわかった。

以下では、速度と圧力とを変数にして非圧縮性流体の差分解析を行う場合に用いられるスタガード格子系[5]の差分スキームの検討結果を紹介する。

3 離散オペレータと離散的な保存形の定義

差分スキームの具体的な検討の前に、まず離散オペレータの定義を行う。本研究では等間隔格子のみについて検討する。よって、差分格子幅 h_1 h_2 h_3 は定数である。変数 ϕについて、まず間隔 nh_1 の x_1 方向の差分オペレータを次式で定義する。

$$\left.\frac{\delta_n\phi}{\delta_n x_1}\right|_{x_1,\,x_2,\,x_3}\equiv\frac{\phi(x_1+nh_1/2,\ x_2,\ x_3)-\phi(x_1-nh_1/2,\ x_2,\ x_3)}{nh_1} \tag{24}$$

上式は (x_1,x_2,x_3) 点上の位置で定義されており、$(x_1+nh_1/2,x_2,x_3)$ 点と $(x_1-nh_1/2,x_2,x_3)$ 点上の変数の値を用いて計算される。間隔 nh_1 の x_1 方向の補間も次式で定義する。

$$\left.\overline{\phi}^{nx_1}\right|_{x_1,\,x_2,\,x_3}\equiv\frac{\phi(x_1+nh_1/2,\ x_2,\ x_3)+\phi(x_1-nh_1/2,\ x_2,\ x_3)}{2} \tag{25}$$

さらに、2つの変数 ϕ と ψ との積に対する特別な補間も次式で定義しておく。

$$\begin{aligned}\left.\widetilde{\phi\psi}^{nx_1}\right|_{x_1,\,x_2,\,x_3}\equiv\ &\frac{1}{2}\phi(x_1+nh_1/2,\ x_2,\ x_3)\,\psi(x_1-nh_1/2,\ x_2,\ x_3)\\&+\frac{1}{2}\psi(x_1+nh_1/2,\ x_2,\ x_3)\,\phi(x_1-nh_1/2,\ x_2,\ x_3)\end{aligned} \tag{26}$$

これらの離散オペレータは差分の格子系に応じて離散化に必要な位置で適用されるものとし、以降では適用位置の記述は省略する。テイラー展開の結果より、式(25)と式(26)はそれぞれ h_1 の2次精度の差分近似および補間であることが示される。

$$\frac{\delta_n\phi}{\delta_n x_1}\simeq\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{n^2}{24}\frac{\partial^3\phi}{\partial {x_1}^3}{h_1}^2+\frac{n^4}{1920}\frac{\partial^5\phi}{\partial {x_1}^5}{h_1}^4+\cdots \tag{27}$$

$$\overline{\phi}^{nx_1}\simeq\phi+\frac{n^2}{8}\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_1}^2}{h_1}^2+\frac{n^4}{384}\frac{\partial^4\phi}{\partial {x_1}^4}{h_1}^4+\cdots \tag{28}$$

より高次精度の差分および補間は、異なる間隔の差分および補間の組み合わせで構成できる。スタガード格子系の差分スキームに現れる４次精度の差分近似と補間を示しておく。

$$\frac{9}{8}\frac{\delta_1\phi}{\delta_1 x_1}-\frac{1}{8}\frac{\delta_3\phi}{\delta_3 x_1}\simeq\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\frac{3}{640}\frac{\partial^5\phi}{\partial {x_1}^5}{h_1}^4+\cdots \tag{29}$$

$$\frac{9}{8}\overline{\phi}^{1x_1}-\frac{1}{8}\overline{\phi}^{3x_1}\simeq\phi-\frac{3}{128}\frac{\partial^4\phi}{\partial {x_1}^4}{h_1}^4+\cdots \tag{30}$$

次に、差分による離散式の保存形を定義する。ϕ の時間発展方程式(1) を考え、ソース項 ${}^kQ^\phi$ が次式のように差分オペレータでまとめられる場合に${}^kQ^\phi$ は(局所) 保存形であるとする。

$${}^kQ(\phi)=\frac{\delta_1({}^kF_j^1(\phi))}{\delta_1 x_j}+\frac{\delta_2({}^kF_j^2(\phi))}{\delta_2 x_j}+\frac{\delta_3({}^kF_j^3(\phi))}{\delta_3 x_j}+\cdots. \tag{31}$$

さらに、周期的な場において、各方向１周期についての ${}^kQ^\phi$ の総和が次式を満足する場合に ${}^kQ^\phi$ は大域的保存形であるとする。

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3}{}^kQ(\phi)\,\Delta V=0 \tag{32}$$

ここで、$\Delta V=h_1h_2h_3$ である。（局所）保存形は大域的保存形の条件も満足する。

4　スタガード格子系の差分スキーム

スタガード格子系[5]では、それぞれの方向の速度成分 U_i は圧力/密度 p の定義点からそれぞれの方向に半格子ずれた位置に配置される。また、連続の式は圧力/密度の定義点上で、またナビエ・ストークス方程式の各成分はそれぞれの速度定義点上で離散化される。

4.1　連続の式と圧力項の差分スキーム

スタガード格子系の２次精度差分では、連続の式と圧力項は次式により離散化するのが自然である。

$$(Cont.-S2)\equiv\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_i}=0 \tag{33}$$

$$(Pres.-S2)_i\equiv\frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i} \tag{34}$$

上式中の $-S2$ はスタガード格子系の２次精度差分であることを意味する。また、４次精度の差分において、連続の式と圧力項とを次式により離散化する場合も考える。

$$(Cont.-S4)\equiv\frac{9}{8}\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_i}-\frac{1}{8}\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_i}=0, \tag{35}$$

$$(Pres.-S4)_i\equiv\frac{9}{8}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i}-\frac{1}{8}\frac{\delta_3 p}{\delta_3 x_i}. \tag{36}$$

式(34) と式(36) は U_i の方程式中で先天的に保存形である。式(34) あるいは式(36) の $i=1$ 成分と U_1 との積を計算しても保存形には書き下せないので U_1^2 の輸送方程式中でこれら圧力項

は保存形とはならないが、圧力項は解析的にも $v_1^2/2$ の輸送方程式中で保存形ではないので問題はない。スタガード格子系で局所的な運動エネルギを定義するには補間が必要となり、その場合に運動エネルギの輸送方程式中の圧力項の保存特性は補間の種類に依存し曖昧さが付きまとう。しかし周期的流れ場において次式の成立することに注目する。

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3} U_i \cdot (Pres. - S2)_i = \sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3} \overline{U_i \frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i}}^{1x_i} \tag{37}$$

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3} U_i \cdot (Pres. - S4)_i = \sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3} \left(\frac{9}{8}\overline{U_i \frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i}}^{1x_i} - \frac{1}{8}\overline{U_i \frac{\delta_3 p}{\delta_3 x_i}}^{3x_i} \right) \tag{38}$$

ここで、式(37) と式(38) の右辺の総和の中に現れる項は次のように変形できる。

$$\overline{U_i \frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i}}^{1x_i} = \frac{\delta_1 U_i \overline{p}^{1x_i}}{\delta_1 x_i} - p \cdot (Cont - S2), \tag{39}$$

$$\frac{9}{8}\overline{U_i \frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i}}^{1x_i} - \frac{1}{8}\overline{U_i \frac{\delta_3 p}{\delta_3 x_i}}^{3x_i} = \frac{9}{8}\frac{\delta_1 U_i \overline{p}^{1x_i}}{\delta_1 x_i} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 U_i \overline{p}^{3x_i}}{\delta_3 x_i} - p \cdot (Cont - S4). \tag{40}$$

これらより、対応する離散的な連続の式が満足される場合に式(34) と式(36) の圧力項の離散式は運動エネルギの輸送方程式中で大域的保存形となることが結論づけられる。式(39) から、運動エネルギの圧力項の評価は一般的に精度に応じた補間を用いて局所的に議論できると思われるかも知れないが、(40) の左辺は式(36) の i 成分と U_i との積の 4 次精度の補間ではない。

NS方程式の圧力項の差分スキーム	輸送方程式		
	U_i	$U_1^2/2$	K
$(Pres. - S2)$	⊙	×	◯$_2$
$(Pres. - S4)$	⊙	×	◯$_4$

表 2. 圧力項の差分スキームの保存特性。⊙ は先天的に保存形、◯$_2$ は $(Cont. - S2) = 0$ が満足される場合に保存形、◯$_4$ は $(Cont. - S4) = 0$ が満足される場合に保存形、および × は非保存形.

以上の結果をまとめると表 2 が得られる。表 1 との比較により、表 2 中の圧力項の差分スキームは、対応する離散的な連続の式が満足される場合に適切な保存特性を持つことがわかる。ここで、式(33) と式(36)、あるいは式(35) と式(34) の組み合わせでは圧力項に関しての運動エネルギの保存特性は満足されないことに注意する必要がある。これは、連続の式の離散式に応じてナビエ・ストークス方程式中の圧力項の適切な離散式が定まることを意味する。

4.2 適切な 2 次精度対流項差分スキーム

先の圧力項の保存特性の検討でも触れたとおり、スタガード格子系では局所的な運動エネルギを一意に定義できない。しかし、速度二乗量の輸送方程式中で対流項が保存形となる場合には、速度二乗量から運動エネルギを計算する補間の種類によらず、運動エネルギの輸送方程式中でもその対流項は保存形となる。速度二乗量 U_2^2 と U_3^2 の保存特性は U_1^2 のそれと同様にし

て評価できる。よって以降では、運動量と速度二乗量 U_1^2 の保存特性のみに注目してスタガード格子系の対流項差分スキームを検討する。

２次精度の差分において、発散型 $(Div.-S2)_i$ 、勾配形 $(Adv.-S2)_i$ および混合型 $(Skew.-S2)_i$ の対流項の離散式を次式で定義する。

$$(Div.-S2)_i \equiv \frac{\delta_1 \overline{U_j}^{1x_i}\,\overline{U_i}^{1x_j}}{\delta_1 x_j} \tag{41}$$

$$(Adv.-S2)_i \equiv \overline{\overline{U_j}^{1x_i}\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_j}}^{1x_j} \tag{42}$$

$$(Skew.-S2)_i \equiv \frac{1}{2}(Div.-S2)_i + \frac{1}{2}(Adv.-S2)_i \tag{43}$$

式(41)はスタガード格子系で通常用いられる発散型の差分スキーム[5]、式(42)は梶島[6]により提案された勾配型の差分スキーム、式(43)はPiacsek & Williams [7]により提案された差分スキームと離散的に一致する。これらは次式で結び付けられている。

$$(Adv.-S2)_i = (Div-S2)_i - U_i \cdot \overline{(Cont.-S2)}^{1x_i} \tag{44}$$

式(44)は解析的な関係式(10)に対するスタガード格子系での適切な近似式とみなせ、$(Cont.-S2)=0$ が満足される場合に $(Div.-S2)_i$、$(Adv.-S2)_i$ と $(Skew.-S2)_i$ は互換となる。$(Div.-S2)_i$ は先天的に保存形である。また、$(Skew.-S2)_1$ と U_1 との積を作り式変形すると次式を得る。

$$U_1 \cdot (Skew.-S2)_1 = \frac{\delta_1 \overline{U_j}^{1x_1}\,\overline{\widetilde{U_1 U_1}}^{1x_j}/2}{\delta_1 x_j}. \tag{45}$$

よって、$(Skew.-S2)_i$ は速度二乗量の輸送方程式中で先天的に保存形となる。

NS方程式の対流項差分スキーム	輸送方程式		
	U_i	${U_1}^2/2$	K
$(Div.-S2)$	⊙	○	○
$(Adv.-S2)$	○	○	○
$(Skew.-S2)$	○	⊙	⊙

表３. ２次精度の対流項差分スキームの保存特性。⊙ は先天的に保存形、○ は $(Cont.-S2)=0$ が満足される場合に保存形.

式(44)の関係を用いるとここで示した２次精度の対流項差分スキームの保存特性が特定できるので、その結果を表３に示す。表１との比較により、表３中の対流項差分スキームは運動量、速度二乗量および運動エネルギの保存特性に関し適切な離散式であることがわかる。

4.3　従来の４次精度対流項差分スキーム

前節で示した対流項差分スキームは適切な保存特性を有するものであるが、２次精度の差分であるので、差分格子数を十分に確保できなければ打ち切り誤差の影響を無視することはで

きない。これを改善するため、これまでにも対流項差分スキームの4次精度化の試みが行われてきた。まず、式(41)〜(43)を基に、それらの2次精度の誤差を打ち消すようにして4次精度の対流項差分スキームを構成すると以下の対流項差分スキームを得る。

$$(Div.-S4A)_i \equiv \frac{9}{8}\frac{\delta_1 \overline{U_j}^{1x_i}\,\overline{U_i}^{1x_j}}{\delta_1 x_j} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 \overline{U_j}^{3x_i}\,\overline{U_i}^{3x_j}}{\delta_3 x_j} \tag{46}$$

$$(Adv.-S4A)_i \equiv \frac{9}{8}\overline{\overline{U_j}^{1x_i}\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_j}}^{1x_j} - \frac{1}{8}\overline{\overline{U_j}^{3x_i}\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_j}}^{3x_j} \tag{47}$$

$$(Skew.-S4A)_i \equiv \frac{1}{2}(Div.-S4A)_i + \frac{1}{2}(Adv.-S4A)_i \tag{48}$$

式(46)の発散型 $(Div.-S4A)_i$ はA-Domis [8]のLESに用いられており、先天的に保存形である。$(Skew.-S4A)_1$ と U_1 との積を作り式変形すると次式を得る。

$$U_1\cdot(Skew.-S4A)_1 = \frac{9}{8}\frac{\delta_1 \overline{U_j}^{1x_i}\,\overline{\widetilde{U_1 U_1}}^{1x_j}/2}{\delta_1 x_j} - \frac{1}{8}\frac{\delta_3 \overline{U_j}^{3x_i}\,\overline{\widetilde{U_1 U_1}}^{3x_j}/2}{\delta_3 x_j} \tag{49}$$

よって、$(Skew.-S4A)_i$ は速度二乗量の輸送方程式中で保存形となる。ここで、$(Div.-S4A)_i$ と $(Adv.-S4A)_i$ との関係を調べると次式を得る。

$$(Adv.-S4A)_i = (Div.-S4A)_i - U_i\cdot\left(\frac{9}{8}\overline{\frac{\delta_1 U_j}{\delta_1 x_j}}^{1x_i} - \frac{1}{8}\overline{\frac{\delta_3 U_j}{\delta_3 x_j}}^{3x_i}\right) \tag{50}$$

式(35)の連続の式の離散式が満足されても式(50)の右辺第2項は0とならないので、発散型 $(Div.-S4A)_i$ と勾配形 $(Adv.-S4A)_i$ との互換性は成立しない。また、式(50)の右辺第2項に現れる項を0とするように連続の式の離散式を定義することはできない。よって、発散型 $(Div.-S4A)_i$ は速度二乗量の輸送方程式中で保存形とはならず、混合型 $(Skew.-S4A)_i$ は運動方程式中で保存形とはならない。勾配形 $(Adv.-S4A)_i$ は運動方程式、速度二乗量の輸送方程式の双方で保存形とはならない。式(50)の右辺第2項に現れる項と式(35)との差をテイラー展開により評価すると次式を得る。

$$\left(\frac{9}{8}\overline{\frac{\delta_1 U_j}{\delta_1 x_j}}^{1x_i} - \frac{1}{8}\overline{\frac{\delta_3 U_j}{\delta_3 x_j}}^{3x_i}\right) - (Cont.-S4) = O(h^4) \tag{51}$$

上式は差分格子幅 h の4乗のオーダである。

NS方程式の対流項差分スキーム	輸送方程式		
	U_i	$U_1{}^2/2$	K
$(Div.-S4A)$	⊙	△	△
$(Adv.-S4A)$	△	△	△
$(Skew.-S4A)$	△	⊙	⊙

表4. A-Domis タイプの4次精度の対流項差分スキームの保存特性。⊙ は先天的に保存形、△ はたとえ $(Cont.-S4)=0$ が満足されても保存形からの $O(h^4)$ の誤差を持つことを示す。

以上の結果をまとめて表４に示す。表４の △ の欄の差分スキームに現れる保存形からの誤差は差分格子幅の４乗に比例して減少するので、これらの対流項差分スキームにより適切な解の得られることを期待できるかもしれない。実際、発散型 $(Div.-S4A)_i$ を用いた低レイノルズ数の一様減衰乱流のLES[8]では妥当な解が得られているようである。しかし、高レイノルズ数の平板チャネル乱流のLES[4]では非物理的な乱流強度分布が与えられてしまう。混合型 $(Skew.-S4A)_i$ を用いればこの問題は解決できるであろうが、逆に運動量のバランスを正確に評価できなくなるであろう。

式(46)〜(48) とは別に、補間、差分ともに４次精度のものを用いて式(41)〜(43) の４次精度化を行えば、次の４次精度の対流項差分スキームを得る。

$$\begin{aligned}(Div.-S4K)_i \equiv\ & \frac{9}{8}\frac{\delta_1}{\delta_1 x_j}\left[\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\left(\frac{9}{8}\overline{U_i}^{1x_j}-\frac{1}{8}\overline{U_i}^{3x_j}\right)\right]\\ & -\frac{1}{8}\frac{\delta_3}{\delta_3 x_j}\left[\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\left(\frac{9}{8}\overline{U_i}^{1x_j}-\frac{1}{8}\overline{U_i}^{3x_j}\right)\right]\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}(Adv.-S4K)_i \equiv\ & \frac{9}{8}\overline{\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\left(\frac{9}{8}\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_j}-\frac{1}{8}\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_j}\right)}^{1x_j}\\ & -\frac{1}{8}\overline{\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\left(\frac{9}{8}\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_j}-\frac{1}{8}\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_j}\right)}^{3x_j}\end{aligned} \tag{53}$$

$$(Skew.-S4K)_i \equiv \frac{1}{2}(Div.-S4K)_i+\frac{1}{2}(Adv.-S4K)_i \tag{54}$$

式(53) の勾配型は式(42) の４次精度化を行い梶島[6]が提案した対流項差分スキームである。式(52)〜(54) の保存特性は表４に準じるものであり、残念ながらこれらの中にも表１に示される保存特性を離散的に満足する４次精度の対流項差分スキームは存在しない。

4.4 適切な４次精度対流項差分スキーム

ここで我々の興味は、４次精度の適切な対流項差分スキームがスタガード格子系に存在するかどうかであろう。離散的な保存特性の検討の結果、本研究では、スタガード格子系における以下の４次精度の対流項差分スキームを提案する。

$$\begin{aligned}(Div.-S4)_i \equiv\ & \frac{9}{8}\frac{\delta_1}{\delta_1 x_j}\left[\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\overline{U_i}^{1x_j}\right]\\ & -\frac{1}{8}\frac{\delta_3}{\delta_3 x_j}\left[\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\overline{U_i}^{3x_j}\right]\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}(Adv.-S4)_i \equiv\ & \frac{9}{8}\overline{\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_j}}^{1x_j}\\ & -\frac{1}{8}\overline{\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_i}\right)\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_j}}^{3x_j}\end{aligned} \tag{56}$$

$$(Skew.-S4)_i \equiv \frac{1}{2}(Div.-S4)_i+\frac{1}{2}(Adv.-S4)_i \tag{57}$$

式(55)の発散型は先天的に保存形である。また、$(Skew.-S4)_1$ と U_1 との積を作り式変形を行うと次式を得る。

$$U_1\cdot(Skew.-S4)_1 = \frac{9}{8}\frac{\delta_1}{\delta_1 x_j}\left[\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_1}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_1}\right)\frac{\widetilde{U_1U_1}^{1x_j}}{2}\right] -\frac{1}{8}\frac{\delta_3}{\delta_3 x_j}\left[\left(\frac{9}{8}\overline{U_j}^{1x_1}-\frac{1}{8}\overline{U_j}^{3x_1}\right)\frac{\widetilde{U_1U_1}^{3x_j}}{2}\right] \quad (58)$$

よって、$(Skewe.-S4)_i$ は速度二乗量の輸送方程式中で先天的に保存形となる。ここで、$(Div.-S4)_i$ と $(Adv.-S4)_i$ との関係を調べると次式を得る。

$$(Adv.-S4)_i = (Div.-S4)_i - U_i\cdot\left[\frac{9}{8}\overline{(Cont.-S4)}^{1x_i}-\frac{1}{8}\overline{(Cont.-S4)}^{3x_i}\right] \quad (59)$$

式(59)は解析的な関係式(10)に対するスタガード格子系での4次精度の適切な差分近似式と見なせ、4次精度の離散的な連続の式 $(Cont.-S4)=0$ が満足されれば $(Div.-S4)_i$、$(Adv.-S4)_i$ と $(Skew.-S4)_i$ は互換となる。

NS方程式の対流項差分スキーム	輸送方程式		
	U_i	${U_1}^2/2$	K
$(Div.-S4)$	⊙	○	○
$(Adv.-S4)$	○	○	○
$(Skew.-S4)$	○	⊙	⊙

表5. 4次精度の対流項差分スキームの保存特性。⊙ は先天的に保存形、○ は $(Cont.-S4)=0$ が満足される場合に保存形を示す。

式(59)の互換性を利用すればここで示した対流項差分スキームの保存特性が特定できるので、その結果を表5に示す。表1との比較により、表5中の対流項差分スキームは、運動量、速度二乗量および運動エネルギの保存特性に関して適切な離散式であることがわかる。

なお、さらに高次精度の適切な差分スキームもスタガード格子系において構成可能である。連続の式と圧力項の6次精度の適切な差分スキームは以下となる。

$$(Cont.-S6)\equiv\frac{150}{128}\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_i}-\frac{25}{128}\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_i}+\frac{3}{128}\frac{\delta_5 U_i}{\delta_5 x_i}=0 \quad (60)$$

$$(Pres.-S6)_i\equiv\frac{150}{128}\frac{\delta_1 p}{\delta_1 x_i}-\frac{25}{128}\frac{\delta_3 p}{\delta_3 x_i}+\frac{3}{128}\frac{\delta_5 p}{\delta_5 x_i} \quad (61)$$

また、$(Cont.-S6)=0$ の下で互換となる6次精度の対流項差分スキームは以下のとおりである。

$$\begin{aligned}(Div.-S6)_i \equiv\ & \frac{150}{128}\frac{\delta_1}{\delta_1 x_j}\left[\left(\frac{150}{128}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{25}{128}\overline{U_j}^{3x_i}+\frac{3}{128}\overline{U_j}^{5x_i}\right)\overline{U_i}^{1x_j}\right]\\ & -\frac{25}{128}\frac{\delta_3}{\delta_3 x_j}\left[\left(\frac{150}{128}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{25}{128}\overline{U_j}^{3x_i}+\frac{3}{128}\overline{U_j}^{5x_i}\right)\overline{U_i}^{3x_j}\right]\\ & +\frac{3}{128}\frac{\delta_5}{\delta_5 x_j}\left[\left(\frac{150}{128}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{25}{128}\overline{U_j}^{3x_i}+\frac{3}{128}\overline{U_j}^{5x_i}\right)\overline{U_i}^{5x_j}\right]\end{aligned} \quad (62)$$

$$(Adv.-S6)_i \equiv \overline{\frac{150}{128}\left(\frac{150}{128}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{25}{128}\overline{U_j}^{3x_i}+\frac{3}{128}\overline{U_j}^{5x_i}\right)\frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 x_j}}^{1x_j}$$
$$-\overline{\frac{25}{128}\left(\frac{150}{128}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{25}{128}\overline{U_j}^{3x_i}+\frac{3}{128}\overline{U_j}^{5x_i}\right)\frac{\delta_3 U_i}{\delta_3 x_j}}^{3x_j}$$
$$+\overline{\frac{3}{128}\left(\frac{150}{128}\overline{U_j}^{1x_i}-\frac{25}{128}\overline{U_j}^{3x_i}+\frac{3}{128}\overline{U_j}^{5x_i}\right)\frac{\delta_5 U_i}{\delta_5 x_j}}^{5x_j} \quad (63)$$

$$(Skew.-S6)_i \equiv \frac{1}{2}(Div.-S6)_i+\frac{1}{2}(Adv.-S6)_i \quad (64)$$

もちろんこれら 6 次精度の差分スキームは表 1 の解析的な保存特性を離散的に満足する。さらに高次精度の差分スキームもスタガード格子系において同様に構成可能である。

5 おわりに

本報ではスタガード格子系の差分スキームの検討結果を示したが、レギュラ格子系およびコロケート格子系の差分スキームの検討もなされている。これらについては、文献 [2, 3, 4] を参照願いたい。

参考文献

[1] Morinishi, Y. (1995): Conservative properties of finite difference schemes for incompressible flow, *CTR Annual Research Briefs 1995*, Center for Turbulence Research, Stanford Univ./NASA Ames Research Center, 121-132.

[2] 森西, (1996a): 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 1 報), 日本機械学会論文集, 投稿中 (論文 No.960176).

[3] 森西, (1996b): 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 2 報), 日本機械学会論文集, 投稿中 (論文 No.960177).

[4] 森西, (1996c): 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 3 報), 日本機械学会論文集, 投稿中 (論文 No.960178).

[5] Harlow, F. H. & Welch, J. E., (1965): Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. of Fluids*, 8, 2182-2189.

[6] 梶島, (1994): 対流項の差分形式とその保存特性, 日本機械学会論文集, 60-574, B, 2058-2063.

[7] Piacsek, S.A. & Williams, G.P., (1970): Conservative properties of convection difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 6, 392-405.

[8] A-Domis, M., (1981): Large-eddy simulation of a passive scalar in isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 104, 55-79.